EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.096**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex $2-5i$.

(4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele $A(1,5)$ și $C(5,1)$.

(4p) c) Să se determine raza cercului de ecuație $x^2+y^2-25=0$.

(4p) d) Să se determine panta dreptei AC, unde $A(1,5)$ și $C(5,1)$.

(2p) e) Să se calculeze $\sin x$ dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{1}{2}$.

(2p) f) Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe $\frac{11+i}{1-11i}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}$.

(3p) b) Să se calculeze rangul matricei $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

(3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $log_3 x=-2$.

(3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-3=0$.

(3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$, să verifice relația $n^3<n+6$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x+2x+1$.

(3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{5n^2-2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = X^2 + X + 1$ și $g = X^2 + X$.

(4p) **a)** Să se determine rădăcinile polinomului f.

(4p) **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 + x < 0$.

(4p) **c)** Să se verifice identitatea $\frac{1}{g(n)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se calculeze suma $S = \frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(2)} + ... + \frac{1}{g(2007)}$.

(2p) **e)** Să se verifice că $f = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

(2p) **f)** Să se arate că $g \neq s^2 + t^2$, pentru orice două polinoame $s, t \in \mathbf{R}[X]$.

(2p) **g)** Să se găsească două polinoame $u, v \in \mathbf{C}[X]$, astfel încât $g = u^2 + v^2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2007} + 1$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $x \in [1,2]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$.

(4p) **c)** Utilizând eventual inegalitatea de la punctul **b)**, să se arate că, dacă $x \in [1,2]$, atunci $\frac{1}{x} + \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \leq \frac{3}{2}$, $\forall x \in [0,1]$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $u, v \in \mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2 \geq 4uv$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la punctul **d)**, să se arate că

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{3}{2}.$$

(2p) **g)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right) \leq \frac{9}{8}.$$